შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

29.04.2012/ მათ/ IV/ 377

ამოცანა № 4

გვერდი № 1

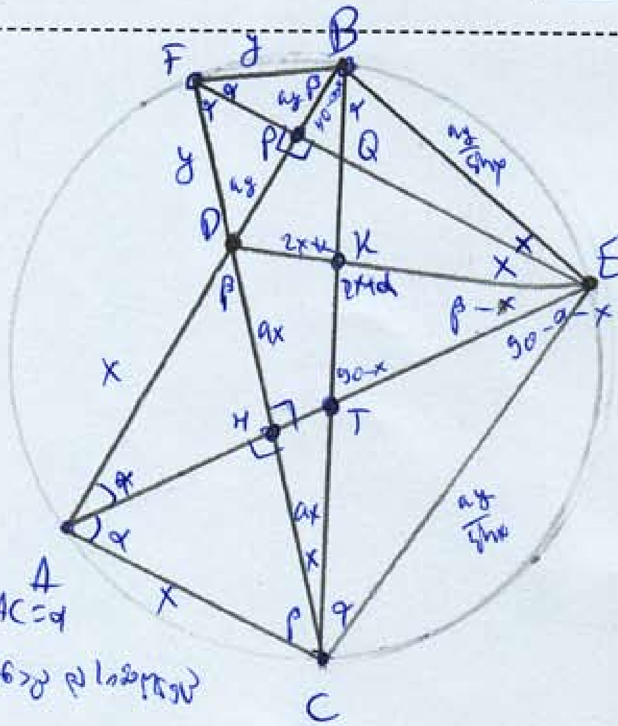
$AC<AB<CB$

$AC=AD$

$\angle BAE=\angle EAC$

$DK\cdot EF=AC\cdot DF$

$\frac{CK}{AC}$



წერტილები ~~...~~ H და T იყოს
AE წრფის გადაკვეთა FC და BC წრფეებთან..
რადგან $AD=AC\equiv x$; $\angle DAC=2\alpha \Rightarrow \angle DAT=\angle TAC=\alpha$
$\angle ADC=\angle ACD\equiv\beta$; რადგან AH ხაზი ბისექტრისაა ტოლფერდა სამკუთხედში
იქნება ანუ $\angle AHD=90^\circ$ და $DH=HC\equiv ax$;
~~...~~ ჩახაზული ოთხკუთხედის თვისებით: $\angle FBD=\beta=\angle ACD$ $\angle CAD=\angle DFB=2\alpha$.
რადგან $\angle ADC=\angle BDF=\beta \Rightarrow \triangle DFB$ ტოლფერდაა ანუ $DF=FB\equiv y$ რადგან $\triangle CAD\sim\triangle DFB\Rightarrow$
$BD=2ay$; რადგან $\angle BFE=\angle BAC=2\alpha \Rightarrow \angle EFD=2\alpha-\alpha=\alpha \Rightarrow FE$ არის $\angle DFB$-ს ბისექტრისა
ანუ $DP=PB=\frac{2ay}{2}=ay$ $\angle FPD=90^\circ$; $\angle FCB\equiv x \Rightarrow \angle FEB=x$ რადგანაც
$DP=PB$ და $\angle EPD=90^\circ \Rightarrow DEB$-ტოლფერდა სამკუთხედია ანუ $DE=EB$ და $\angle DEP=x$
რადგან ხაზი AE არის A კუთხის ბისექტრისა $BE=EC$ ანუ $BE=EC=DE$; $\angle BCE=\angle BAE=\alpha$
$\angle AEF=\beta \Rightarrow \angle AED=\beta-x$; $\angle BTE=90-x$; $\angle CBE=\alpha \Rightarrow \angle DKB=2x+\alpha$ (გარე კუთხე
$\triangle BKE$-ში) $\angle DBK=\angle AEC=90-\alpha-x$;

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

29.04.2012/ მათ/ IV/ 377

ამოცანა № 4

გვერდი № 2

ვიპოვოთ დამტკიცება $DK \cdot EF = AC \cdot DF$ $AC = x$ $DF = y \Rightarrow DK \cdot EF = xy$

ΔBDK-ში სინუსების თეორემის თანახმად $\frac{BD}{\sin 2x+\alpha} = \frac{DK}{\sin(90-\alpha-x)} \Rightarrow KD = \frac{BD}{\sin 2x+\alpha} \cdot \cos(x+\alpha)$
$BD = 2ay$

ანუ $xy = EF \cdot 2ay \cdot \frac{\cos(x+\alpha)}{\sin 2x+\alpha} \Rightarrow x = EF \cdot 2a \cdot \frac{\cos(x+\alpha)}{\sin(2x+\alpha)}$ სადაც

$BE = EC = DE = \frac{ay}{\sin x}$ (ΔBDE-დან); ΔCKE-ში სინუსების თეორემის თანახმად

$\frac{EC}{\sin 2x+\alpha} = \frac{CK}{\sin(90-\alpha-x+\beta-x)}$ $EC = \frac{ay}{\sin x}$ $90-\alpha-x+\beta-x = 90-2x-\alpha+90-\alpha = 180-2(x+\alpha)$
$= 180 - 2(x+\alpha) \Rightarrow$ ეს ნიშნავს ...

ანუ

$\frac{ay}{\sin x} \cdot \frac{\sin 2(x+\alpha)}{CK} = \sin 2x+\alpha$ ჩავსვათ ამაში $\sin 2x+\alpha$-ს მნიშვნელ

მივიღებთ. $x = EF \cdot 2a \cdot \cos(x+\alpha) \cdot \frac{\sin x \cdot CK}{ay \cdot \sin 2(x+\alpha)}$; საიდან $\frac{CK}{AC} = \frac{CK}{x}$ ანუ

ჩვენი ტოლობიდან $\frac{CK}{x} = \frac{y \cdot \sin 2(x+\alpha)}{2 \cdot \cos(x+\alpha) \cdot EF \cdot \sin x} = \frac{y \cdot 2 \cdot \sin(x+\alpha) \cdot \cancel{\cos(x+\alpha)}}{\cancel{\cos(x+\alpha)} \cdot EF \cdot 2 \cdot \sin x} = \frac{y \cdot \sin(x+\alpha)}{EF \cdot \sin x}$

ΔEHC-დან ვიღებთ $\sin(x+\alpha) = \frac{EH}{\frac{ay}{\sin x}} = \frac{EH \cdot \sin x}{ay} \Rightarrow \frac{CK}{x} = \frac{y \cdot EH \cdot \cancel{\sin x}}{ay \cdot EF \cdot \cancel{\sin x}} = \frac{EH}{EF \cdot a}$

ΔDHA-დან ვიღებთ ~~$\sin\beta =$~~
$\cos\beta = \frac{ax}{x} = a$ ჩავსვათ a-ს მნიშვნელ $\frac{CK}{x}$-ში მივიღებთ $\frac{CK}{x} = \frac{EH}{EF \cdot \cos\beta}$

დავაკვირდეთ ΔFHE-ს $\angle HEF = \beta \Rightarrow \frac{EH}{EF} = \cos\beta$ ჩავსვათ $\Rightarrow$

$\frac{CK}{x} = \frac{CK}{AC} = \frac{EH}{EF} \cdot \frac{EF}{EH} = 1.$

ანუ $\frac{CK}{AC} = 1.$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

29.04.2012/ მათ/ IV/ 377

ამოცანა № 5

გვერდი № 1.

[illegible]

შევამოწმოთ $n=1$, $n=2$, $n=3$ [illegible]

[illegible] $m<n$ [illegible] $m=2$ [illegible] $3 \geq 3$ [illegible]

[illegible] $n>3$ [illegible] $n \geq 3 \geq 3 \cdot 2^{m+1}$ [illegible]

[illegible] $n \geq 2^{m+1}-1$ [illegible]

[illegible] $n \geq 2^{m+1}-1 = 2^{m+1}+2^{m+1}-1$ [illegible]

[illegible]

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

29.04.2012/ მათ/ IV/ 377

ამოცანა № 5

გვერდი № 2

[illegible] 2^{m+1} [illegible]

[illegible] $n-2^{m+1} \geq 2^{m+1}-1 \Rightarrow n \geq 2^{m+2}-1$ [illegible]

2^{m} [illegible]

[illegible] $n-1$ [illegible]

[illegible] $n-1-m$ [illegible] $n-1$ [illegible] $n-1-m$ [illegible].

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

29.04.2012/ მათ/ IV/ 377

ამოცანა № 6

გვერდი № 1

$p(x) = (x+d_1)(x+d_2)\cdots(x+d_9)$

ზოგადობის შეუზღუდველად ვთქვათ $d_1<d_2<d_3<d_4 \ldots <d_9 \Rightarrow$ $d_1+8 \le d_2+7 \le d_3+6 \le \ldots \le d_8+1 \le d_9$. თუ $d=d_9$ და $d^8=d_9^8$ ის ტოლ d_9^8

1-დან 20-მდე მარტივ რიცხვთა რაოდენობა არის 8 ცალი და დავამტკიცოთ რომ ~~რომ~~ $p(n)$-ს აქვს 8-ზე მეტი მარტივი გამყოფი მაშინ ამოცანა დამტკიცებულია. ვთქვათ საწინააღმდეგო რომ $p(n)$-ს არ აქვს 8-ზე მეტი მარტივი გამყოფი მაშინ

რომ $n+d_1 = p_1^{\alpha_{11}} \cdot p_2^{\alpha_{12}} \cdots p_8^{\alpha_{18}}$

$n+d_2 = p_1^{\alpha_{21}} \cdot p_2^{\alpha_{22}} \cdots p_8^{\alpha_{28}}$.

$\vdots$

$n+d_9 = p_1^{\alpha_{91}} \cdot p_2^{\alpha_{92}} \cdots p_8^{\alpha_{98}}$